voluntad HIDRAULICA

Voluntad Hidráulica • Año X • No. 23/1972 • Sumario

**Toda correspondencia debe enviarse a:
Revista "Voluntad Hidráulica",
Humboldt No. 106, La Habana 4, Cuba.**

Publicación trimestral del Grupo Hidráulico del DAP (Desarrollo Agropecuario del País). Redacción: Humboldt No. 106, La Habana 4, Cuba. Teléf: 7-2208. Inscripta como correspondencia de segunda clase en la Admón. de Correos. Esta edición consta de 2,500 ejemplares. Su distribución es gratuita y sólo tiene valor de canje por los organismos de Cuba. Diseños: Román Compañy, Alejandro Noa y Carlos Sánchez Puga. Fotos: Dpto. Fotográfico del Grupo Hidráulico. Emplane y distribución: Editorial CENTSCO. Impresa en la Unidad "Osvaldo Sánchez", del Instituto Cubano del Libro.

Portada: Paisaje cubano

EL PROBLEMA VARIACIONAL DEL PERFIL DE EQUILIBRIO DE LOS RIOS SUBTERRANEOS

JULIO J. VALDES RAMOS

Resumen

Se señala y demuestra el carácter variacional del perfil de equilibrio de una corriente de agua en un sistema, así como la importancia que desde el punto de vista de la evolución morfológica de la región tiene la consideración de dicho problema, pudiéndose lograr una mejor comprensión del mecanismo de erosión y hidrocirculación en los macizos rocosos. Finalmente es obtenida la solución del problema planteado, mediante el uso del cálculo variacional, encontrándose la ecuación de la curva del perfil de equilibrio, que resulta ser una cicloide.

Tanto desde el punto de vista de la Geomorfología como de la Espeleomorfología, presenta interés la influencia de las líneas de drenaje como modificadores del paisaje, en especial, por su actividad erosiva. Sería, pues, de gran valor conocer, para una zona, después de haber ubicado y reconocido las características y morfología de sus ríos, arroyos, etc., las directrices principales de su evolución futura, lo que brindaría un conocimiento más completo de los procesos erosivos: pérdida por arrastre de los suelos, lugares de acumulación, etc.

Para la Espeleología también resulta esto importante, toda vez que se podría, al menos en principio, predecir la probable morfología de una caverna y extender el análisis a la evolución de un sistema subterráneo o de todo un carst. Las condiciones suficientes para poder llegar a hacerlo se discuten junto con el alcance del modelo presentado en el desarrollo matemático, en el que, además, se mencionan las variables fundamentales que toman parte en el proceso natural.

Las implicaciones que para la economía del país trae la posibilidad de conocer estos procesos, son obvias. El solo hecho de su influencia en la conservación de los suelos, interacción con acuíferos, cambios en el curso de las corrientes de agua (tanto superficiales como subterráneas), acumulación y embalse de las mismas, etc., hacen que sea necesaria la consideración del problema del perfil de equilibrio de los ríos en los proyectos de obras hidráulicas para planes económicos y para estos mismos en sí.

Lógicamente, sólo la evaluación cuantitativa del proceso puede ilustrar de modo conveniente; además, sin ella es imposible considerarlo desde el punto de vista de la ingeniería hidráulica.

Enfoque analítico

Considérese un río "joven" y veamos las condiciones físicas que lo definen inicialmente.

Una cierta masa de fluido se deposita sobre la superficie terrestre, producto de la precipitación, en una región situada a una determinada altura sobre el nivel del mar (fig. 1), siendo su perfil una curva irregular

La condición minimizante de la energía potencial de un sistema sometido a efectos gravitatorios, obliga al agua a buscar un estado de mayor proximidad al de mínima energía, geográficamente el nivel del mar. Comienza así el excavado superficial del perfil cuando el agua se dirige hacia el mar.

Ya se ha visto la necesidad de que el agua alcance el estado de menor energía posible; como consecuencia de ello se impone también la condición de que el drenaje se realice en el menor tiempo posible. Es esta segunda conclusión la fundamental en el tipo de análisis que desarrollaremos a continuación.

Entonces, el problema consiste, pues, en encontrar cuál es la curva que une dos puntos, sean estos A y B, naturalmente no situados en la misma vertical, que permita a un cuerpo material recorrer la distancia entre ellos, a lo largo de dicha curva, en el menor tiempo posible.

Este problema, conocido como Problema de la Braquistócrona, fue propuesto en 1696 por Iohanis Bernoulli, y fue uno de los que indujo a Leonardo Euler

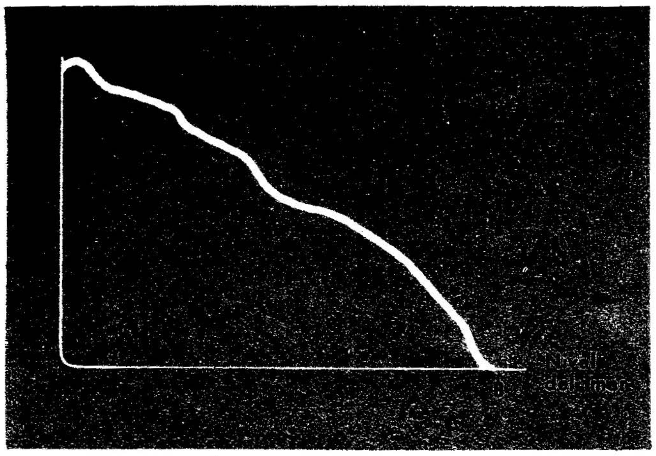

Fig. 1

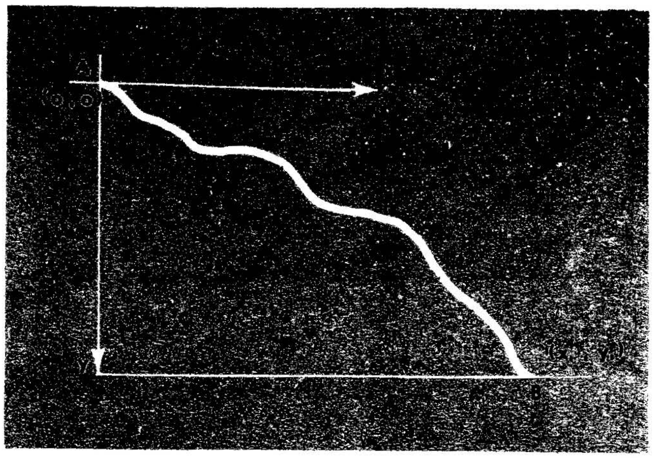

Fig. 2

a crear el Cálculo Variacional, herramienta matemática que se utiliza en la resolución del problema.

Para comenzar se fija un sistema de coordenadas al cual poder referirse y situar los puntos inicial y final, así como conocer la posición geométrica de la curva, cuya ecuación se propone encontrar (fig. 2).

Ante todo, es necesario observar la caída del cuerpo para poder determinar la forma de la funcional. Dado que no se supone la participación de otras fuerzas (fricción, resistencia del aire, etc.), la velocidad del movimiento del cuerpo considerado será:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2\,gy}$$

Entonces, la funcional que describe el tiempo empleado en el movimiento entre los puntos considerados, en particular el (0,0) y el (x_1, y_1), de acuerdo al sistema de referencia previamente establecido, tiene la forma:

$$t\left[y\ (x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

Pero la funcional debe cumplir con las condiciones iniciales:

$$y\ (0) = 00, \qquad y\ (x_1) = y,$$

como consecuencia de la ubicación de los puntos A y B en el sistema de referencia. Ello resulta evidente, puesto que la curva encontrada deber ser satisfecha por dichos puntos, que son la frontera del problema; en otras palabras, son las condiciones de contorno.

Utilícese ahora la ecuación de Euler, para después de integradas, conocer las curvas *extremales,* pues sólo en ellas puede alcanzarse el extremo de la funcional. La ecuación de Euler es la siguiente:

$$Fy - Fxy' - Fyy'\ \ y' - Fy'\ y'\ y'' = 0$$

Veamos ahora la forma que adquiere la ecuación de Euler al sustituir en ella la función sub-integral de la funcional del problema. Observando que la función sub-integral no contiene explícitamente a x, se puede plantear directamente la primera integral de la ecuación, la cual, convenientemente operada y habiendo sustituido en ella función sub-integral, queda:

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y\ (1 + y'^2)}} = C$$

Simplificando, queda:

$$\frac{1}{\sqrt{y\ (1 + y'^2)}} = C'$$

y, finalmente:

$$y\ (1 + y'^2) = C'$$

Procedamos a resolver la ecuación diferencial, que es de primer orden.

Puesto que la ecuación cumple con todas las condiciones que exige el Teorema de Existencia y Unicidad de la Solución, ésta será única, es decir, que una vez resuelta la ecuación diferencial hallada que cumpla con las condiciones iniciales establecidas al inicio, le habremos encontrado, sin lugar a dudas, la ecuación de la curva buscada.

Observando la ecuación se nota que pertenece al tipo F (y,y') = 0. Para resolverla se sustituye a y'

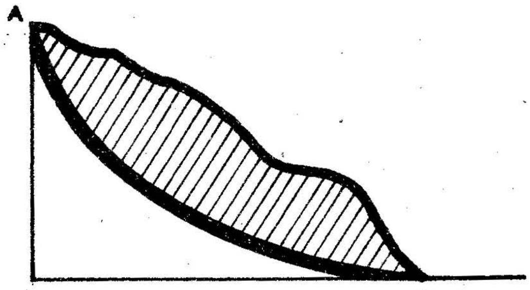

Fig. 3

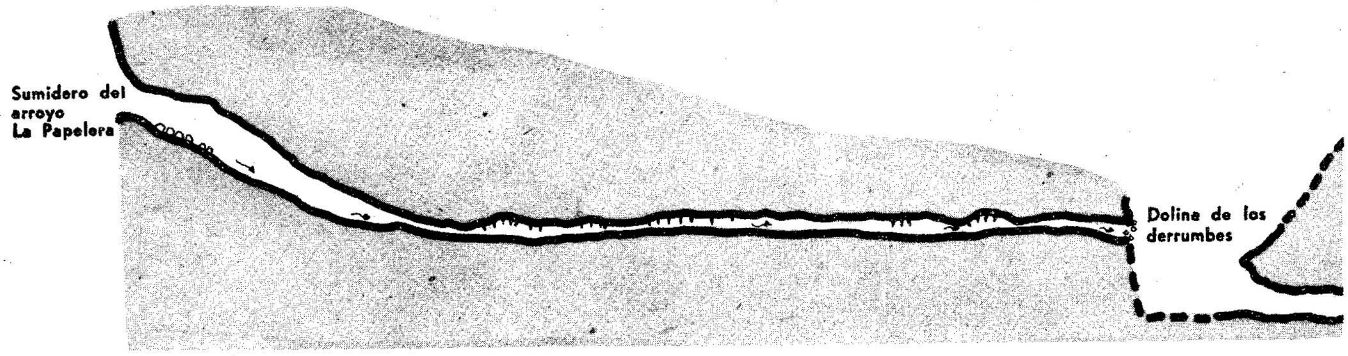

Fig. 4

por un parámetro. Sea esta sustitución $y' = \cot w$, e incorporándola:

$$y = \frac{C'}{1 + \cot^2 w} = \frac{C'}{\csc^2 w} = C' \operatorname{sen}^2 w$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 w = \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 w}{2}$$

se obtiene

$$y = \frac{C'}{2} (1 - \cos^2 w)$$

Para hallar $x = x(w)$ notemos que

$$dx = \frac{dy}{y'}$$

Operando y sustituyendo

$$dx = \frac{2C' \operatorname{sen} w \cos w \, dw}{\cot w} = 2C' \operatorname{sen}^2 w dw =$$
$$= C' (1 - \cos 2w) \, dw$$

Integrando en ambos miembros

$$x = C' (w - \frac{\operatorname{sen} 2w}{2}) + C'' =$$
$$= \frac{C'}{2} (2w - \operatorname{sen} 2w) + C''$$

Entonces las ecuaciones paramétricas de la curva buscada son:

$$x - C'' = \frac{C'}{2} (2w - \operatorname{sen} 2w)$$

$$y = \frac{C'}{2} (1 - \cos 2w)$$

Pero como de acuerdo con las condiciones iniciales, para $y = 0$, $x = 0$ se obtiene si se sustituye que $C'' = 0$. Y si ahora, además, se hace $\varnothing = 2w$, las ecuaciones paramétricas adoptan la configuración

$$x = \frac{C'}{2} (\varnothing - \operatorname{sen} \varnothing)$$

$$y = \frac{C'}{2} (1 - \cos \varnothing)$$

que representan una familia de cicloides.

Finalmente se ha llegado a la solución del problema, habiendo encontrado que la curva que describe el perfil de equilibrio de un río es un arco de cicloide, representado en la figura 3.

Si el río, en el transcurso de su evolución, logra alcanzar su perfil de equilibrio, toda la zona sombreada será excavada por él; representarán suelos rocas, material terrígeno que se habrá perdido.

Al tener el río un cauce más profundo se modificarán las posiciones de los acuíferos a él cercanos y, en general, el funcionamiento hidrológico de la región cambiará, conjuntamente con el paisaje, cuya evolución geomorfológica dependerá de este fenómeno de búsqueda del perfil de equilibrio, sobre todo si se trata de un río permanente con gran caudal.

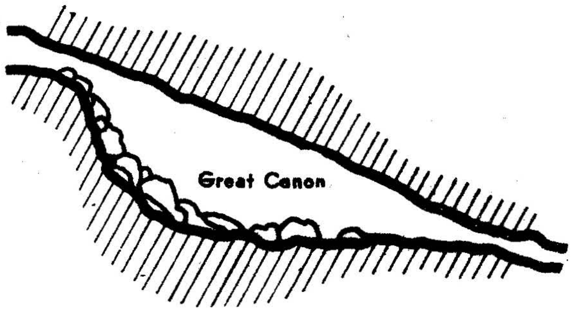

Fig. 5

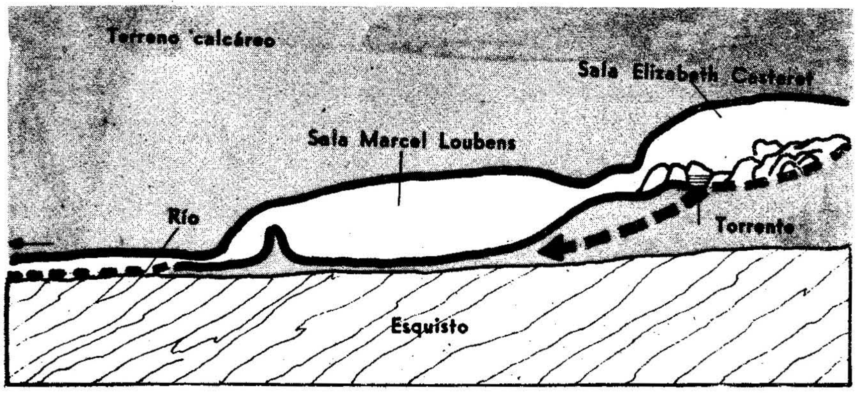

Fig. 6

Aquí se ha supuesto de modo formal o implícitamente homogeneidad en el macizo rocoso, y ausencia de fenómenos tectónicos; además, se ha excluido la presencia de discordancias geológicas y litológicas que van complicando el modelo y que, al tenerlas en cuenta, modificarán el problema de modo apreciable, toda vez que es necesario encontrar una funcional, cuya función sub-integral dependa de varias variables, en las que las condiciones iniciales serían más estrictas; circunstancias éstas que ni con mucho escapan a la posibilidad matemática de resolución, pero sí a la primera aproximación que se supone en este trabajo.

Pese a las dificultades que presenta el análisis del caso real, debido a las complicaciones que introduce en su tratamiento matemático, no debe pensarse que el modelo ideal resulta estéril. El principal problema del caso real estriba en "traducir" ése gran cúmulo de variables de tipo puramente geológico, a lenguaje matemático; y no son muchos los intentos que se han realizado en esta dirección. No obstante lo cual, el modelo ideal puede servir como punto en un entorno del que pueden fijarse los valores adecuados en los cálculos; o en un lugar con condiciones adecuadas en el sentido de proximidad al modelo ideal, situar normalmente la curva.

Incluso, en sitios en que prácticamente no existan condiciones siquiera parecidas al caso teórico, la situación de la curva brindará una idea del estado actual del paisaje considerado y su lugar en lo que se refiere a la evolución geomorfológica total de la región.

Analicemos una posibilidad de caso real, muy común en Cuba.

Si se supone una región cársica se debe señalar, ante todo, la densidad de fisuración que posee, producto de la gran intensidad de procesos de carácter tectónicos desarrollados en nuestras islas, y si se suma a ello la permeabilidad que presenta, así como la posibilidad de ser disuelta, en virtud de reacciones químicas que se verifican entre la roca y el agua caída, se verá que la mayor parte del drenaje será subterráneo, jugando importante papel la circulación hipógea. En este caso, además de los factores antedichos, se debe tener en cuenta que, en general, los ríos subterráneos atraviesan estratos de diferentes clases, buzamientos, permeabilidad y regímenes de precipitaciones.

¿En qué medida contribuye cada uno de estos factores en el problema que nos ocupa?

Sin una ecuación matemática que describa el comportamiento de cada uno, no es posible dar una solución exacta, y, dada la importancia que reviste lo ya considerado en las obras permanentes, fundamentales para el desarrollo económico, no será tiempo perdido el que se emplee en buscar una forma de "traducir" la intervención de esas circunstancias al elemento matemático.

La elaboración de una teoría sobre los ríos subterráneos será el factor decisivo en la comprensión de los complicados problemas que presenta la circulación hipógea del agua y su almacenamiento en cuencas freáticas.

Es aquí donde viene la espeleología a desempeñar el papel importante, al brindar datos sobre la hidrología subterránea como ciencia más cercana a esa cuestión.

De modo general es difícil observar en cavernas la evolución total hasta la cicloide, por las causas ya analizadas, pero existen aparentemente tramos con condiciones propicias en el interior de algunos cauces hipógeos en los que es posible observar lo que pudiéramos llamar "morfología cicloidea". Como ejemplo de tales lugares podemos mencionar la por-

ción del talweg subterráneo del arroyo La Papelera, comprendida entre el Sumidero de ese arroyo y la Dolina de los Derrumbes, en Cueva Jíbara (según cartografía de A. Núñez Jiménez y Nicasio Viña, en Núñez 1967 ep. cit.), cuyo aspecto se muestra en la figura 4. Cueva Jíbara está en la zona cársica Guisa-Los Negros, Oriente, señalada como un subtipo dentro de las Elevaciones Cársicas (Acevedo 1967 ep. cit.). También existen otras de esas porciones en la Galería del Gran Cañón, Gouffre Berger, la caverna más profunda del mundo (según un mapa de J. Cadoux y otros, en J. Cadoux 1957 ep. cit.) y en la Sima de la Pierre Saint Martin, cuyas secciones se presentan en las figuras 5 y 6.

El estudio de cómo las condiciones geológicas, climáticas y demás pueden ser consideradas con vistas a determinar la forma de la función sub-integral de la funcional, es objeto de estudio por parte del autor.

Conclusiones

1. La evolución de un río en busca de su perfil de equilibrio influye decisivamente en la evolución geomorfológica de un paisaje. La evolución está guiada por las particularidades de la región, como fenómenos tectónicos, litología, estratigrafía, clima, etc., y estrechamente ligada a la erosión de los suelos y rocas, proceso de importante relación con la economía.
2. El problema del perfil de equilibrio de un río puede tratarse matemáticamente utilizando los recursos del Cálculo Variacional de distintas variables, pero presenta gran complicación, toda vez que no ha podido darse un tratamiento matemático adecuado a los factores involucrados en ese proceso.
3. El modelo obtenido utilizando el Cálculo Variacional de una variable representa un caso ideal, que arroja una curva de equilibrio en forma de arco de cicloide, y aunque no es reflejo de la realidad, puede analizarse de modo aproximado en: los procesos de erosión de los suelos, posibles zonas de deposición, excavado de los macizos rocosos y otros caracteres geomorfológicos.
4. Pese a las inexactitudes del modelo ideal, existen lugares en cauces de ríos subterráneos donde es posible aplicarlo al poseer éstos condiciones apropiadas, como lo demuestran los segmentos de recorridos subterráneos de Cueva Jíbara, la Gouffre Berger y la Sima de Pierre Saint Martin.
5. Son necesarios estudios profundos por parte de geólogos y físicos para resolver el caso real y poder realizar cálculos exactos, así como una teoría matemática sobre los ríos subterráneos, en especial, de la hidrología cársica.

BIBLIOGRAFIA

Acevedo González, Manuel. 1967. **Clasificación general y descripción del carso cubano.** INRH Publ. Esp. Num. 4, La Habana.

Cadoux, Jean y otros. **One Thousand Meters Down** **George Allen & Unwin LTD,** London, 1957.

Mijlin, S. G. **Métodos directos de la física matemática,** Gostejizdat, 1950.

Núñez Jiménez, Antonio. **Clasificación genética de las cuevas de Cuba,** Academia de Ciencias, Instituto de Geografía de La Habana, 1967.

Pontraguin, L. S. y otros. **Teoría matemática de los procesos óptimos,** Fizmatguiz, 1961.

Rey Pastor, Julio. **Geometría Analítica,** Ediciones R. Inst. Cubano del Libro, 1968.

Tazieff Haroun. **La Sima de la Pierre Saint Martin,** Editorial Juventud, Barcelona, 1953.

SIMBOLOS

En este trabajo se utilizan los siguientes símbolos:

C = constante arbitraria

C' = otra constante arbitraria

F_{xy} = derivada parcial sucesiva de la función sub-integral; primero, respecto de x; y luego de y

F_y = derivada parcial de la función sub-integral, respecto de y

$F_{yy'}$ = derivada parcial sucesiva de la función sub-integral; primero, respecto de y; luego, de y'

$F_{y'y'}$ = derivada parcial doble de la función sub-integral, respecto de y'

g = aceleración gravitatoria

s = abscisa curvilínea

t = tiempo

x = abscisa cartesiana

y = ordenada

y' = primera derivada de y respecto a x